作业六

1. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 是发散的。（可以直接使用如下课堂上证明的结论：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ ）

证明:

这里 $a_n=\frac{1}{2n-1}$ 。对于任意大于等于 1 的自然数 n ，注意到 $\frac{1}{2n-1}\geq\frac{1}{2n}$ 。因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\\&\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}\infty\frac{1}{n}\\&=\infty.\end{aligned}$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 是发散的 。

2. 判断以下级数的敛散性（需要给出理由）。

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n}-n}$ （提示： $e^{\frac{1}{n}-n}=\frac{e^{1/n}}{e^n}$ ）

c) $\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(1+\frac{1}{n}\right)$

d) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{2n-1}\right)$ （提示： 可以直接使用 1 中的结论）

解:

a) 收敛。

首先，$\frac{\cos^2 n}{n^2+1} \le \frac{\cos^2 n}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$ 。由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，根据比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2+1}$ 也收敛。

b) 收敛。

$e^{\frac{1}{n}-n} = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^n} \le \frac{1}{e^n}$ 。由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ 收敛，根据比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}-n}$ 也收敛。

c) 发散。

这是因为 $\lim_{n\to\infty} \cos(1+\frac{1}{n}) = \cos 1 \neq 0$ 。

d) 发散。

可以通过积分判别法来证明。事实上，

$$\begin{aligned}\int_3^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, \mathrm{d}x &= \int_2^{\infty} \mathrm{d} \ln(\ln x) \\ &= \lim_{N\to\infty} \ln \ln N - \ln \ln 3 \\ &= \infty.\end{aligned}$$

e) 发散。

注意到 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} / \sin\left(\frac{1}{2n-1}\right) = 1$ 。根据比值判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2n-1}\right)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 具有相同敛散性。根据题 1 中的结论，我们可得 e) 是发散的。

3. 判断以下级数的敛散性（需要给出理由）。若收敛，计算出级数和。

a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+2}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$

解:

a) 收敛。直接计算前 n 项之和并令 $n \to \infty$ 即可。级数和为 $\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}$ 。

b) 收敛。注意到

$$\frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \ .$$

直接计算前 n 项之和并令 $n \to \infty$ ，可得级数和为

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} \ .$$